Solution 13 :

1°/ Soit $f(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x \quad (x>1)$.

f est définie, continue, dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x>1$,

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}<0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $(-)$	

d'où $\forall x>1,\ f(x)<0$ et par suite $\forall x>1,\ 1-\frac{1}{x}<\ln x$

- Soit $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ \ (x>1)$

g est définie, continue, dérivable sur $]1,+\infty[$

$$\forall x>1,\ g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}$$

$$=\frac{-(x^2-2x+1)}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$ $(-)$	

on a : $\forall x>1,\ g(x)<0 \Rightarrow \ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$

Conclusion : $\forall x>1,\ 1-\frac{1}{x}<\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$.

2°/ Soit $\phi_n(x)=\ln(1+nx)-x$. ϕ_n est définie, continue, dérivable sur $]-\frac{1}{n},+\infty[$ et $\forall x>\frac{-1}{n}\ \ \phi'_n(x)=\frac{n}{1+nx}-1=\frac{n-1-nx}{1+nx}$

$\phi'_n(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}>-\frac{1}{n}$